Topologia
Lista 1

Zad 1. Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i niech $A \subset X$. Dowieść, że najmniejszy zbiór domknięty zawierający A jest postaci

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall_{r>0} \ K(x,r) \cap A \neq \emptyset\},$$

natomiast największy zbiór otwarty zawarty w A jest postaci

$$\mathrm{Int}\,(A) = \{x \in X : \exists_{r>0} \ K(x,r) \subset A\}.$$

Zad 2. Na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ wyznaczyć wnętrze oraz domknięcie zbioru

$$A = \{(x,y) : x \in [0,1], y \in [0,1)\}, \quad B = \{((-1)^n, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{Q}\}, \quad D = \{(x,y) : y = \sin\frac{1}{x}, x > 0\}.$$

Zad 3. Podać przykład dwóch podzbiorów A i B prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ takich, że zbiory $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$ są parami różne.

Zad 4. Pokazać, że operacja domykania w przestrzeni topologicznej ma następujące własności
(OD1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
(OD2) $A \subset \overline{A}$,
(OD3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,
(OD4) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Zad 5. Pokazać, że jeśli na rodzinie 2^X podzbiorów zbioru X określona jest operacja o własnościach (OD1)-(OD4) (patrz zadanie 4) to rodzina

$$\tau = \{A \subset X : X \setminus A = \overline{X \setminus A}\}$$

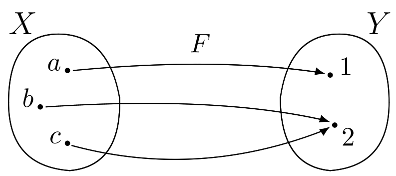
jest topologią na X. Domknięciem zbioru A w przestrzeni (X, τ) jest $\overline{A}$.

Zad 6. Niech $F : X \to Y$ będzie funkcją. Wykazać, że przyporządkowanie

$$X \supset A \longmapsto F^{-1}(F(A)) \subset X$$

jest operacją domknięcia określoną na podzbiorach zbioru X.

Zad 7. Niech F będzie funkcją daną przez diagram



Wyznaczyć topologię na X zadaną przez operację domknięcia zdefiniowaną w zadaniu 6. Czy topologia ta jest metryzowalna?